

# 抗震计算中几个问题的研究

黄吉锋, 李云贵, 邵弘, 陈岱林

(中国建筑科学研究院, 北京, 100013)

[摘要] 从能量的角度对抗震计算中的一些问题进行了研究: 提出了判断振型数足够与否的通用方法; 提出最不利地震作用方向的概念, 并具体给出了计算方法; 从反应能的观点定义了振型方向角, 并给出计算公式; 借鉴 ETABS 程序定义了振型的侧振成分和扭振成分的计算公式, 并给出了一个几何解释。上述成果已在 PMSAP、SATWE 和 TAT 结构分析程序中实现, 应用效果良好。

[关键词] 参与能量比, 广义有效质量系数, 最不利地震作用方向, 振型方向角, 侧振成分, 扭振成分

[中图分类号] TU973<sup>+</sup>.31; TU973<sup>+</sup>.2 [文献标识码] A

## Research of Some Problems in Structural Earthquake Analysis

HUANG Ji-feng; LI Yun-gui; SHAO Hong; CHEN Dai-lin

(China Academy of Building Research, Beijing, 100013)

[Abstract] Based on the view point of strain energy, some problems in structural earthquake analysis have been researched in this paper. Firstly, a general method of judging the adequacy of the number of participation modes is proposed. Secondly, the author advance the concept of "the most disadvantageous earthquake direction", on which a detailed algorithm is given. Then the direction angle of a mode is defined and the corresponding calculation formulas are also listed. At last, the calculation formulas of the lateral and the torsional vibrating components of a mode is presented.

[Keywords] Ratio of participation energy, Generalized effective mass factor, The most disadvantageous earthquake direction, Direction angle of a mode, Component of lateral vibration, Component of torsional vibration

## 1. 引言

对结构进行地震反应谱分析, 是建立在振型叠加法基础上的, 它用结构在少数低阶振型上的反应的某种组合来近似代替结构的全部反应。之所以能够这样做, 是因为地震反应的主要成分一般都包含在低阶振型所张成的子空间中, 用不太多的参与振型, 即可算得较为准确的解。然而在实际应用中, 面对复杂工程, 我们还是难以确知参与振型到底取多少才能使误差足够小。基于此, 本文探讨的第一个问题就是: 参与振型数与误差的关系。

一般而言, 沿着水平面的不同方向, 建筑结构会表现出不同的刚度性质, 这就意味着相同的地震沿着不同的方向作用于结构, 结构反应的剧烈程度也会不同, 我们有理由相信, 一定存在某个作用方向, 使得结构的

地震反应在某种意义下最为剧烈, 本文探讨的第二个问题就是: 如何确定最不利地震作用方向。

最后, 振型的形式是我们了解结构刚度及质量分布性态的重要参考, 本文对建筑结构振型方向的确定进行了研究, 提出了一种新方法。同时, 参考 ETABS 程序, 给出同一振型中扭振成分和侧振成分的计算公式。

## 2. 参与振型数是否足够的判断:

### 广义有效质量系数

WILSON E. L. 教授曾经提出振型有效质量系数的概念用于判断参与振型数足够与否, 并将其用于 ETABS 程序, 他的方法是基于刚性楼板假定的。现在不少结构因其复杂性需要考虑楼板的弹性变形, 因此需要一种更为一般的方法, 不但能够适用于刚性楼板,

也应该能够适用于弹性楼板。出于这个目的，我们从结构变形能的角度对此问题进行了研究，提出了一个通用方法，下面述其详情：

首先说明一些符号的含义： $K$ ：结构刚度矩阵； $M$ ：结构质量矩阵； $\Phi_j$ ：第  $j$  振型，且满足质量归一化条件  $\Phi_j^T M \Phi_j = 1$ ；

$B$ ：地震方向向量； $S_a(T, \xi)$ ：加速度谱曲

线； $T_j, \lambda_j, \xi_j$ ：第  $j$  周期、特征值、阻尼

比； $n, m$ ：结构自由度和参与振型数。

根据地震反应谱理论，第  $j$  振型上的最大位移分量：

$$X_j = (\Phi_j^T M B) \left( \frac{S_a(T_j, \xi_j)}{\lambda_j} \right) \Phi_j \quad (1)$$

相应的应变能：

$$\begin{aligned} \Pi_j &= \frac{1}{2} X_j^T K X_j \\ &= (\Phi_j^T M B)^2 \left( \frac{S_a(T_j, \xi_j)}{\lambda_j} \right)^2 \lambda_j \quad (2) \\ &\stackrel{def}{=} q_j (\Phi_j^T M B)^2 \stackrel{def}{=} q_j \gamma_j^2 \end{aligned}$$

根据振型关于刚度矩阵的正交性，整体结构的最大可能应变能可以写成如下解耦形式：

$$\Pi(n) = \sum_{j=1}^n \Pi_j = \sum_{j=1}^n q_j \gamma_j^2 \quad (3)$$

设采用  $m (m \leq n)$  个参与振型，我们可以定义参与能量比值：

$$\eta = \frac{\Pi(m)}{\Pi(n)} = \frac{\sum_{j=1}^m q_j \gamma_j^2}{\sum_{j=1}^n q_j \gamma_j^2} \quad (4)$$

显然  $0 \leq \eta \leq 1$ ，振型数  $m$  足够多时， $\eta$  将足够接近 1。因此  $\eta$  可以作为衡量振型数是否足够的参数。遗憾的是  $\Pi(n)$  不易求出，

直接使用  $\eta$  有困难。为此我们考虑变通方式：

首先，结合规范<sup>[1][2]</sup>给出的加速度谱，我们可以验证下式成立：

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n > 0 \quad (5)$$

这样一来，容易从数学上严格证明下式成立：

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\Pi(m)}{\Pi(n)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m q_j \gamma_j^2}{\sum_{j=1}^n q_j \gamma_j^2} \geq \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j^2}{\sum_{j=1}^n \gamma_j^2} \stackrel{def}{=} \eta^* \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面，我们把地震方向向量  $B$  在振型向量组  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$  上展开，可得：

$$B = \Phi \alpha \quad (7)$$

这里， $\alpha$  是  $B$  在主振型空间中的坐标向量，(7) 式两边左乘  $\Phi_j^T M$ ：

$$\begin{aligned} \Phi_j^T M B &= \Phi_j^T M \Phi \alpha \\ &= \alpha_j = \gamma_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

由 (7)、(8) 两式我们有：

$$\begin{aligned} B^T M B &= \alpha^T \Phi^T M \Phi \alpha \\ &= \alpha^T \alpha = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \end{aligned} \quad (9)$$

将 (9) 式代入 (6) 式可以得到：

$$\eta^* = \frac{1}{B^T M B} \sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \quad (10)$$

由于  $\eta^*$  是  $\eta$  的下界，所以我们可以把  $\eta^*$  取为衡量振型数是否足够的参数，在地震计算中控制了  $\eta^*$ ，就相当于控制了参与能量比值  $\eta$ 。根据我们的计算经验，当  $\eta^* \geq 0.9$  时，基底剪力误差一般小于 5%。在这个意义上，我们称  $\eta^* \geq 0.9$  的情形为振

型数足够；否则称振型数不够。 $\eta^*$ 的计算公式(10)，不仅适用于通常的能利用刚性楼板假定简化为糖葫芦串的规则的多、高层建筑结构，而且适用于任意的有限元离散结构，比如含有弹性楼板、弹性节点及大开洞的复杂多、高层结构；体育场馆、影剧院结构；大跨结构等等。由于 $\eta^*$ 是通常的基于刚性楼板假定的有效质量系数的推广，方便起见，可以称其为广义有效质量系数。

### 3. 最不利地震作用方向

地震沿着不同的方向作用，结构地震反应的大小一般也不同，我们可以用结构变形能来衡量地震反应的剧烈程度。结构变形能是地震作用方向角的函数，存在某个角度使得结构变形能取极大，那么这个方向我们就称为最不利地震作用方向。下面我们讨论如何确定这个方向。设参与振型取 $m$ 个，则结构变形能：

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{j=1}^m \Pi_j \\ &= \sum_{j=1}^m q_j \gamma_j^2 = \sum_{j=1}^m q_j (\Phi_j^T MB)^2\end{aligned}\quad (11)$$

设地震作用方向与X轴正向的夹角为 $\alpha$ ，

那么地震方向向量B可以进一步表为：

$$B = B_x \cos \alpha + B_y \sin \alpha \quad (12)$$

这样一来：

$$\begin{aligned}\Pi &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j (\Phi_j^T MB_x \cos \alpha + \Phi_j^T MB_y \sin \alpha)^2 \quad (13) \\ &\stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j (x_j \cos \alpha + y_j \sin \alpha)^2\end{aligned}$$

令其导数为零：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= \cos 2\alpha \sum_{j=1}^m q_j x_j y_j \\ &- \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sum_{j=1}^m q_j (x_j^2 - y_j^2) = 0\end{aligned}\quad (14)$$

得到：

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \sum_{j=1}^m q_j x_j y_j}{\sum_{j=1}^m q_j (x_j^2 - y_j^2)} \quad (15)$$

由此可以确定出最不利地震作用方向角

$\alpha$ 和 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ，并且容易验证，对任意 $\alpha$ ：

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2}(\alpha) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2}(\alpha + \frac{\pi}{2}) < 0 \quad (16)$$

于是可以知道 $\alpha$ 和 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ 中一个使变

形能取极大，则另一个必使变形能取极小。

### 4. 振型的方向

对一个建筑结构而言，我们可以样来定义振型的方向：如果沿着角度 $\alpha$ 作用的地震使得振型 $\Phi$ 上有最大的反应能量，则称该方向角 $\alpha$ 为振型 $\Phi$ 的方向角。在此定义下，可以如下确定角度 $\alpha$ ：

$$\begin{aligned}\Pi(\Phi, \alpha) &= q(\Phi^T MB)^2 \\ &= q(\Phi^T MB_x \cos \alpha + \Phi^T MB_y \sin \alpha)^2 \quad (17) \\ &\stackrel{def}{=} q(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2\end{aligned}$$

令 $\Pi$ 对 $\alpha$ 的偏导数为零：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} &= 2q(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ &(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) = 0\end{aligned}\quad (18)$$

得到：

$$\tan 2\alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad (19)$$

由此可以确定为振型  $\Phi$  的方向角。

## 5. 振型的侧振、扭振成分及其几何解释

### 何解释

一个振型的反应能量可以分拆成平动能量和转动能量，它们各自占总能量的比例我们称为侧振成分和扭振成分。下面的公式借鉴了 ETABS 程序振型方向因子的概念。

侧振能量：

$$E_L = \sum \frac{1}{2} m_i (u_i^2 + v_i^2) \quad (20)$$

扭振能量：

$$E_T = \sum \frac{1}{2} J_i \theta_{zi}^2 \quad (21)$$

侧振成分：

$$e_L = \frac{E_L}{E_L + E_T} \quad (22)$$

扭振成分：

$$e_T = \frac{E_T}{E_L + E_T} \quad (23)$$

当然也可以把侧振成分进一步分为 x 向侧振成分，y 向侧振成分等，道理一样。上述公式中， $m_i, J_i, u_i, v_i, \theta_{zi}$  分别是节点的质量、惯性矩、x 向位移、y 向位移和扭转角。显然，侧振成分与扭振成分之和为 1.0，如果某振型的侧振成分大于 0.8，我们就认为该振型是比较纯粹的侧振振型，如果某振型的扭振成分大于 0.8，我们就认为该振型是比较纯粹的扭转振型。对上述公式，还可以给出一个几何上的解释：

简单起见，考虑一个采用刚性楼板假定的单层结构，其质心位移为  $u, v, \theta_z$ ，此时刚性板的运动可以看成是一个定轴转动（视平动为转动中心无穷远），设转动中心与楼层质心之间的距离为  $d$ ，那么侧振能量和扭振能量分别为：

$$E_L = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2) \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} m (d\theta_z)^2 = \frac{1}{2} m d^2 \theta_z^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} J \theta_z^2 \quad (25)$$

二者比值：

$$\frac{E_L}{E_T} = \frac{m d^2}{J} = \frac{d^2}{(\sqrt{J/m})^2} = \left(\frac{d}{r}\right)^2 \quad (26)$$

其中， $r = \sqrt{J/m}$  是楼层回转半径。

这样我们就给出了判断振型成分的一个几何解释：如果刚性楼板的转动中心与其质心之间的距离  $d$  大于其回转半径  $r$ ，那么相应振型的侧振成分大于其扭振成分，是侧振振型；如果刚性楼板的转动中心与其质心之间的距离  $d$  小于其回转半径  $r$ ，那么相应振型的侧振成分小于其扭振成分，是扭振振型。

## 6. 算例

为了直观地说明上文中提到的有关抗震计算的各个概念，下面给出一个算例。

例一、某 10 层对称 L 型平面的框架结构，平面布置如图 1 所示，各跨跨度均为 3m，层高均为 3.3m。柱尺寸 0.6m\*0.6m，布置于每个交叉点，梁尺寸 0.3m\*0.7m。材料均为 C25 混凝土。

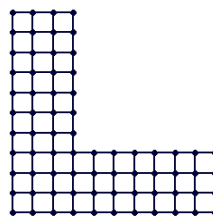


图 1 结构平面示意图

### (A). 广义有效质量系数 $\eta^*$ 与结构地震反应

#### 计算结果的关系

表 1 中列出了地震反应谱分析中参与振型数由 1 个增加至 30 个的过程中，广义有效质量系数  $\eta^*$  以及相关结构反应的变化情

况,从计算数据来看,当 $\eta^*$ 超过90%时,结构的基底剪力及楼层位移的计算结果,随振型数的增加变化很小,基本趋于稳定,这也从一个侧面说明了为什么在地震反应谱分析中,应控制有效质量系数超过90%。此外还有一点值得指出:在采用CQC组合的地震反应谱分析中,当参与振型数不足时,结构反应的计算结果与理论解之间,并无一定的大小关系,也可以说,随着振型数的增多,计算结果趋于理论解的过程可能是振荡的,通过考察CQC组合公式,这一现象不难解释。

表1  $\eta^*$ 与结构地震反应计算结果的关系

参与振型数	$\eta^*$ (%)	剪重比 (%)	位移角	最大顶部位移 (mm)
1	24.33	0.98	1/2480	10.291
3	80.73	3.09	1/2949	8.569
5	89.86	3.18	1/2909	8.595
6	91.58	3.20	1/2917	8.589
10	96.03	3.22	1/2917	8.589
15	98.28	3.23	1/2917	8.589
30	100.0	3.23	1/2916	8.589

### (B). 最不利地震作用方向

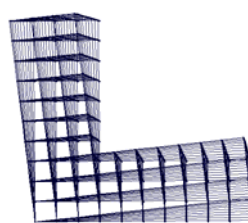
本例算出的最不利地震作用方向为45度,从而形成沿(45度,135度)作用的一对地震作用正交轴,它与沿(0度,90度)正交轴作用的地震计算结果的对比,列在表2中。沿最不利地震方向的剪重比及平均位移明显大于其他角度的计算结果,因而具有表征意义,结构抗震设计当中,除了应考虑沿(0度,90度)作用的地震,还应考虑沿最不利地震方向(45度,135度)作用的地震,否则,对于构件承载力设计及变形控制均可能偏于不安全。此外值得注意的是,由于扭转效应的影响,沿最不利地震方向的顶部最大位移则并非最大。

表2 不同地震作用角度下的结构反应

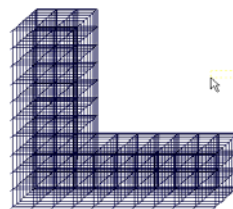
地震作用角度	剪重比 (%)	顶部平均位移 (mm)	顶部最大位移 (mm)
0	3.23	6.736	8.589
90	3.23	6.736	8.589
45	3.51	7.200	7.200
135	3.06	6.249	8.000

### (C). 振型的振动方向及其扭振和侧振成分

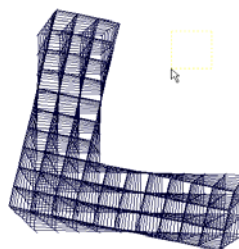
由对称性容易判断,本结构平动主振型的振动方向必沿着45度和135度,按照本文公式计算,精确给出该结果。前三阶特征对的计算结果如下:第一周期0.747秒,沿135度振动,侧振成份0.75,扭振成份0.25。第二周期0.720秒,沿45度振动,侧振成份1.00,扭振成份0.00。第三周期0.673秒,侧振成份0.10,扭振成份0.90,是扭转振型。结合图2所示的振型图容易知道,这样的定量结果正确地刻画了振型的振动性态,对于设计人员判断计算结果的合理性具有明确的指导意义。



a) 一阶振型图



b) 二阶振型图



c) 三阶振型图

图2 结构的前三阶振型俯视图

## 7. 结语

本文从能量的角度对地震计算中的一些问题进行了研究:提出了判断振型数足够

与否的通用方法；提出最不利地震作用方向的概念，并具体给出了计算方法；从反应能的观点定义了振型方向角，并给出计算公式；借鉴ETABS程序定义了振型的侧振成分和扭转成分的计算公式，并给出了一个几何解释。

上述成果均已在 PKPM 的 PMSAP、SATWE 和 TAT 结构分析程序中实现，对于地震反谱分析的正确实现，起到了重要作用。

## 参考文献

- [1] 《高层建筑混凝土结构技术规程》 JGJ 3-2002, 2002 北京
- [2] 《建筑抗震设计规范》，GB 50011-2001, 2001 北京
- [3] 《复杂多、高层建筑结构分析与设计软件 PMSAP 使用手册》，中国建筑科学研究院 PKPM CAD 工程部，2005